

О работе семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике



СГИБНЕВ Алексей Иванович

учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru



НЕТРУСОВА Наталья Михайловна

учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
natnetint@gmail.com

На четвертом, пятом и шестом заседаниях семинара **Г.Б. Шабат** сделал доклады на тему **«Арифметика как источник исследовательских тем для школьников»**. Для удобства чтения эти доклады объединены.

Преимущество арифметики как источника тем состоит в том, что формулировки задач просты и понятны. А недостаток в том, что ученые давно ею занимаются и то, что «плохо лежит», давно подобрано. Нерешенными остались сверхтрудные задачи, которые давать детям рискованно.

Эксперименты с простыми числами

Обозначим $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ – множество простых чисел. Рассмотрим четыре темы, из которых в первых двух результаты доказаны, а во вторых двух – нет.

Тема 1: Распределение простых чисел

Введем функцию $Pi(x)$, равную количеству простых чисел, не превосходящих x .

Еще Евклид доказал, что функция $y = Pi(x)$ неограниченно возрастает (это первое известное доказательство от противного).

1. Какова скорость роста? Оказывается, $\frac{Pi(x)}{x} \rightarrow 0$ – рост функции медленный.

Можно получить этот результат экспериментально, строя таблицы простых чисел и подсчитывая их количество.

2. Как сделать конструктивным доказательство Евклида, т.е. научиться по нескольким данным первым простым числам строить (какое-то) следующее? С этим справился третьеклассник на кружке экспериментальной математики у Г.Б.

3. Можно рассматривать величину $\frac{Pi(x)}{x}$ как вероятность того, что взятое наугад натуральное число, не превосходящее x , окажется простым, и работать в терминах вероятностей.



Г.Б. Шабат

Гаусс экспериментально обнаружил, а Адамар и Валле-Пуссен доказали, что $Pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$. Чебышев доказал оценку $a \frac{x}{\ln x} < Pi(x) < A \frac{x}{\ln x}$, где a и A – некоторые константы.

1. Можно находить аналогичные константы по таблицам, сравнивать их с чебышевскими. (Пока это работа скорее наблюдателя, чем исследователя.)

2. Можно почитать работу Чебышева (она не очень трудная), попытаться доказать оценки с «упрощенными» a и A . (Элементарное доказательство неравенства Чебышева с $a = \frac{1}{3}$ и $A = 6$ можно прочесть в книге:

Шафаревич И.Р. Избранные главы алгебры. М.: Математическое образование, 2000. Глава 5.)

Валле-Пуссен использовал в своем доказательстве хорошую тригонометрию, которую можно изложить школьнику. Он опирался на тот (доказанный им) факт, что нули дзета-функции не лежат на правой границе полосы $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. Если же верна гипотеза Римана, что все нетривиальные нули лежат на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, то оценки $Pi(x)$ получаются гораздо более точные (и соответствующие наблюдениям). Для тех, кто все это знает, тема о распределении простых числах становится очень привлекательной.

Тема 2: Простые числа в арифметических прогрессиях

Рассмотрим множество $P \cap (a + dN)$, где $\operatorname{НОД}(a, d) = 1$. Дирихле доказал, что это множество бесконечно. (В частном случае, когда $d = 1$, получается утверждение Евклида о бесконечности множества простых чисел.)

1. Изучить свойства этих множеств. Можно брать, например, $d = 10, 100, \dots$ и рассматривать, на какие цифры, пары цифр и т.д. кончаются простые числа.

Тема 3: Близнецы

Это пары простых чисел, отличающихся на 2, например, $(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31) \dots$ До сих пор неизвестно, конечно ли множество этих пар.

1. Составить программу для перечисления пар.
2. Исследовать распределение близнецов (оно загадочно).

Тема 4: Проблема Гольдбаха

$4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7 = 5 + 5 \dots$

«Всякое ли четное число представимо в виде суммы двух простых?» – нерешенная проблема.

Количество таких представлений поддается статистическому подсчету, желательно на компьютере, так как нужен перебор до десятков тысяч (руководитель может найти работу Литтлвуда 1920-х годов. См. также: *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2004. С. 45–57.)

Обобщенные числа

Эта тема связана с мировоззренческими различиями классической и современной науки, которые и отражены в таблице:

Классическая наука	Современная наука
– Как устроен мир? – \mathbf{R}^3	– Какие возможны миры? (Нет выделенного мира. Главное – логическая непротиворечивость.)
– Какими числами описывать мир? – \mathbf{R} – Историческая традиция – подробно изучать \mathbf{R} ; инженерная традиция – делать калькуляторы в \mathbf{R} , – предполагается неограниченность и бесконечная делимость (что отвергается современной физикой)	Какими бывают числа? Разными! Например: \mathbf{R} \mathbf{F}_p (поля вычетов) $\mathbf{Z}_d, \mathbf{Q}_p$ (d -адические и p -адические числа) $\mathbf{F}_q[t]$ (многочлены), $\mathbf{F}_q(t)$ (рациональные функции), $\mathbf{F}_q[[t]]$ (формальные степенные ряды), $\mathbf{F}_q((t))$ (ряды Лорана) (Отметим, что $\mathbf{F}_q[t], \mathbf{F}_q[[t]]$ – кольца, $\mathbf{F}_q(t), \mathbf{F}_q((t))$ – поля.)

над конечными полями

Речь пойдет о некоторых числовых множествах из списка справа. В курсе математики ученики изучают разные темы (уравнения, графики и т.д.). Вопрос: а как эти темы выглядят для *других числовых множеств*? Некоторые вещи получатся неинтересными, некоторые слишком сложными, а некоторые – интересными и доступными.

Заметим, что при обычном сложении в \mathbf{Z} мы сносим единицы старшего разряда **влево**, при сложении в \mathbf{Z}_p – **вправо** (т.е. в том же направлении, в котором читаем число), а при сложении многочленов в \mathbf{F}_p **ничего не сносим**.

Тема 1: Поля вычетов

Пусть \mathbf{F}_5 – поле вычетов из 5 элементов.

1. Как выглядят таблицы сложения и умножения в этом поле?
2. Какие еще пары таблиц могут быть таблицами сложения и умножения в этом поле?
3. Какими свойствами обладают эти числа?
4. Что изменится при замене 5, скажем, на 10? Оказывается, есть различия в полях простых и составных порядков – ученик может их открыть самостоятельно.
5. Графики. Координатная плоскость превращается в таблицу 5×5 клеток. Как выглядят графики линейных и квадратичных функций на такой плоскости?
6. Квадратные уравнения. (Интересно, что квадратных уравнений в поле \mathbf{F}_5 всего $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$; можно все их перебрать и расклассифицировать.) Когда уравнение разрешимо? – Когда дискриминант равен квадрату какого-то элемента поля (является вычетом): $D = x^2$.

Вопрос об условиях того, что элемент является вычетом, можно исследовать эмпирически, и прийти к **закону взаимности Гаусса**:

Пусть p и q – простые нечетные числа. Тогда

$$\neg \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{q} \in F_p \\ \sqrt{p} \in F_q \end{array} \right. \Leftrightarrow p, q \in 4n+3.$$

Тема 2: Десятиадические числа

В эту тему удобно вводить школьников с помощью такой задачи.

Складные квадраты (автор задачи А.А. Кириллов)

$$5 \times 5 = 25$$

$$6 \times 6 = 36$$

$$76 \times 76 = 5776$$

$$376 \times 376 = 141376$$

Факт: Существует и единственно x , оканчивающееся на 6, бесконечное влево такое, что $x^2 = x$.

Существует и единственно y , оканчивающееся на 5, бесконечное влево такое, что $y^2 = y$. Формально: $x \in Z_{10} = \{\dots + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0 \mid x_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$ (кольцо 10-адических чисел).

Факт: x и y непериодичны (т.е. последовательности $\dots x_2, x_1, x_0$ и $\dots y_2, y_1, y_0$ непериодичны).

Это нетрудно доказать от противного. Пусть в x повторяется кусок X длиной N . Тогда

$$x = a + X(10^N + 10^{2N} + \dots) = a + \frac{X \cdot 10^N}{1 - 10^N}.$$

Но тогда $x \in Q$. Однако уравнение $x^2 = x$ в Q имеет только два решения $x = 0$; 1. Тем самым x не может быть рациональным числом, значит, у него нет периода.

Осмысленной является задача для школьника: написать программу, которая бы выдавала последовательно знаки чисел x и y .

Н.М. Нетрусова добавила, что некоторые обыкновенные дроби можно разложить в 10-адические числа (как в десятичные дроби). Например,

$$\frac{1}{3} = \dots 667, \text{ потому что } \dots 667 \cdot 3 = \dots 001.$$

Литература: Коблиц Н. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.

Тема 3: Арифметика многочленов на примере $F_5[t]$

Договоримся вместо многочленов записывать их коэффициенты, например вместо $2t^2 + 3t + 4$ писать 234. (Сложно приучить писать 0 вместо пропуска.) Тогда запись $234 + 12 = 241$ (по модулю 5) означает сложение двух многочленов.

Система удобна тем, что в старший разряд ничего не переходит, т.е. ничего не надо держать в уме!

Арифметику многочленов можно изучать по аналогии арифметикой целых чисел, например, по такому плану:

- Арифметические действия
- Алгоритм Евклида
- НОД, НОК, разложения на простые множители
- Уравнения (например, квадратные)

При таком параллельном изучении мысль раскрепощается: школьникам становится ясно, что важна не привязка к конкретным объектам, а наборы свойств. Например, что нам нужно от целых чисел для построения алгоритма Евклида? Деление с остатком. В $F_p[t]$ оно также определено, а аналогом размера числа служит степень многочлена, т.е. длина «числа», составленного из коэффициентов.

Немного подробнее о квадратных уравнениях. Рассмотрим все квадратные трехчлены в $F_5[t]$. Их всего 100. (Если первый коэффициент принять за 1, то трехчленов будет всего 25.) Можно сделать групповой проект с перебором всех значений этих многочленов и расклассифицировать их по количеству нулей.

Можно взглянуть на вопрос с другой стороны: какие из многочленов имеют нули? Те, что раскладываются на множители. Т.е. если «число» длиной 3 раскладывается в произведение двух разных «чисел» длиной 2, то соответствующий многочлен имеет 2 корня, а если «число» — квадрат, то 1 корень, если не раскладывается — нет корней.

Идея проекта по информатике: научить компьютер работать в этой арифметике.

На четвертом заседании семинара 13 января 2009 г. были заслушаны доклады учеников.

1. Алексей Рухович «Степеньные последовательности графов без кратных ребер» (8-й класс, школа «Интеллектуал», научный руководитель А.Б. Скопенков)

Степень вершины графа — это количество ребер, выходящих из этой вершины. Пусть задано натуральное число n и числа $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. При каких условиях найдется граф с n вершинами, степени которых $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$?

Общая задача разбивается на четыре подзадачи: разрешены или запрещены петли, разрешены или запрещены кратные ребра. Кроме того, рассматривалось два типа графов: а) связный граф на плоскости, б) связный граф, клеточный на поверхности.

Итого 8 подзадач. Для 6 из них Леша нашел и доказал критерии существования графа с заданными степенями вершин.

После вопросов выяснилось, что новыми являются условия существования графа без кратных ребер. А задача о графе без петель и кратных ребер пока открыта.

Условия таковы:

Для связного планарного графа (возможно, с петлями и кратными ребрами)



А. Рухович

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n \text{ делится на } 2, \quad (1)$$

$$2n - 2 \leq d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n. \quad (2)$$

Для связного планарного графа без кратных ребер условия те же, но $n > 2$.

Для графа без петель к условиям (1) и (2) добавляется следующее:

$$2d_i \leq d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n \text{ для любого } i. \quad (3)$$

Слушатели высказали следующие пожелания:

- в начале доклада определить все термины, которыми докладчик будет пользоваться;

- в начале же дать обзор результатов работы в компактной форме (это можно сделать с помощью презентации) и сразу сформулировать, какие результаты известны в литературе, а какие получены впервые в работе;

- учитывая ограниченное время на доклад, не рассказывать все доказательства, а выбрать одно, и на простом примере продемонстрировать идеи работы.

Был отмечен высокий уровень работы.

2. Денис Троян «Программа, генерирующая ритмы»

(10-й класс, школа «Интеллектуал», научный руководитель А.Ю. Грамши)

В докладе были изложены идеи алгебры ритмов, придуманной А.Ю. Грамши.

Любой ритм можно представлять состоящим из последовательности ударов и пауз одинаковой длительности. Пример ритма: удар-пауза-пауза-удар. Очевидно, ритм можно закодировать последовательностью нулей и единиц, например, (1001). Иначе его можно записать как (3,1), объединяя удар и две паузы в одну длительность. Так вводится математическая запись ритмов. Затем вводятся операции над ритмами, вначале унарные (с одним ритмом): ракоход – исполнение исходного ритма в обратном порядке; дополнение ритма – преобразование долгих сигналов в короткие, а коротких – в длинные; сдвиг; смягчение и заострение ритмов. Интересно, что операции над ритмами образуют группу.



Д. Троян

Затем вводятся бинарные операции: сложение и умножение. Ритмы одной длины складываются почленно ($0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 1$). Ритмы разной длины пропорционально растягиваются до длины, равной наименьшему общему кратному, и также складываются почленно. Пример:

$$(1, 0, 1) + (1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) + (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0).$$

Умножение сводится к проигрыванию одного ритма «в ритме другого ритма». Например, умножая ритм $A = (2, 1)$ на ритм $B = (2, 1, 1)$, получим ритм

$$C = A \times B = \{(2, 1) \times 2, (2, 1) \times 1, (2, 1) \times 1\} = (4, 2, 2, 1, 2, 1).$$

Очевидно, умножение некоммутативно. Зато, оказывается, оно дистрибутивно.

Также рассматривались двухпараметрические ритмы (с низкими и высокими ударами). Для них вводятся аналогичные операции и еще некоторые свои.



М.А. Ройтберг и А.Ю. Грамши

Затем докладчик продемонстрировал написанную им программу, которая выполняет эти операции над ритмами и «озвучивает» результат на динамиках.

В ходе бурного обсуждения докладчику предложили так подать материал на грядущей конференции:

- «1) я написал программу, генерирующую ритмы;
- 2) для этого использовалась такая-то запись ритмов;
- 3) ритмы можно складывать по таким-то правилам;
- 4) ритмы можно умножать... и выполнять много

разных других операций.

Вот результат, слушайте!»

Отметим, что к обоим докладчикам было одинаковое пожелание — лучше готовиться. Опыт слушания школьников показал, что в работе с ними нужно уделить значительное время подготовке доклада.

Пятое заседание семинара состоялось 17 февраля 2009 г. **С.К. Ландо** сделал доклад на тему **«Выращивание деревьев»**.

Эта тема довольно простая, но возникла в сложных вопросах лет 10 назад. Она представляет собой переплетение результатов переднего края науки и задач, доступных школьникам.

Рассмотрим дерево с пронумерованными n вершинами. Пронумеруем произвольным образом ребра. Поменяем местами числа, записанные в вершинах первого ребра. Затем поменяем местами числа, записанные в вершинах второго ребра, и так далее до последнего. Получится некоторая перестановка номеров вершин. (Иначе говоря, каждому ребру соответствует перестановка — транспозиция вершин, которые оно соединяет. Перемножим соответствующие транспозиции. Посмотрим на перестановку, которая получается в результате перемножения.)

1. Упражнение. Для любого дерева и любой нумерации получится длинный цикл (т.е. цикл, переставляющий все элементы)¹.

2. Задача. Возьмем граф с одним циклом. Занумеруем вершины и ребра. Перемножим транспозиции, соответствующие ребрам. Какой циклический тип перестановки получится? (Т.е. на какие циклы она распадается? Какова их длина?)

Заметим, что любой цикл длины n — это произведение $n - 1$ транспозиций².

3. Задача (Гурвиц). Сколькими способами можно разложить цикл длиной n в произведение транспозиций? (Числа, получающиеся в ответе, называются числами Гурвица.)

Каждое ребро графа — транспозиция на множестве его вершин.

4. Утверждение. Произведение транспозиций взаимно однозначно соответствует графу с занумерованными ребрами и вершинами.

5. Упражнение. Сколько бывает помеченных деревьев с $n + 1$ вершинами?

¹ Подробнее см.: Бурман Ю.М. Графы и перестановки, <http://www.mccme.ru/mmks/mar08/Burman.pdf>.

² П.С. Александров объяснял это так: люди, находящиеся в байдарке, могут пересечь как угодно, меняясь попарно несколько раз.

Ответ: $(n + 1)^{n-1}$ (теорема Кэли³).

Продолжим задачу. Рассмотрим произвольный граф. Последовательно удалим все вершины степени 1 вместе с ребрами, в них приходящими. Далее удалим все вершины степени 2, соединив концы, приходящих в них ребер. Назовем получившийся граф *клумбой*. Будем выращивать на клумбе деревья (с вершинами в вершинах или на ребрах клумбы).

Задача 6. *Сколько существует различных помеченных деревьев с n вершинами на клумбе G ? (Т.е. n -вершинных графов, представляющих из себя деревья на клумбе G).*

Самая простая клумба представляет из себя две вершины, соединенные тремя ребрами. Теорема Кэли дает ответ к задаче 2 в случае «одноточечной клумбы». Оказывается, что ответ мало зависит от клумбы.

Задача возникла в работе Д. Звонкина последних лет, выполненных в связи с теоретической физикой, квантовой теорией поля, алгебраической геометрией.

С.А. Беляев сделал доклад на тему **«Правильные разбиения поверхности сферы с k ручками»** (См. текст автора в приложении: http://www.mathedu.ru/poliniom/belyaev-sferi_s_k_ruchkami.pdf.)

Комментарии к докладу.

Г.Б. Шабат. 1) предлагаю разделить задачу с уравнениями и задачу реализации в виде многогранника; 2) вынести в отдельную задачу двойственность (нахождение двух правильных графов, а потом создание правильной структуры из них); 3) эта задача относится к числу решенных.

С.К. Ландо: Эту задачу можно решать в терминах перестановок. См. первую главу книги: *Lando S.K., Zvonkin A.K. Graphs on Surfaces and Their Applications, Springer 2004.*

³ Эту формулу нетрудно угадать с помощью последовательного перебора помеченных деревьев с 1, 2, 3, 4 и т.д. вершинами. (См. *Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет, № 49.*) Затем можно доказать ее, например, с помощью кодирования деревьев.

Код для помеченных деревьев называется кодом Прюфера и строится следующим образом.

Возьмем какое-нибудь дерево с $n + 1$ вершинами, помеченными различными числами от 0 до n . Мы сопоставим дереву последовательность из $n + 1$ букв $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Последовательность строится индуктивно.

Возьмем в дереве лист с минимальным номером и возьмем в качестве первой буквы последовательности x с индексом, равным номеру вершины, с которой этот лист соединен.

Затем удалим выбранный лист. Второй буквой будет x с номером, равным номеру вершины, с которой соединен минимальный лист в оставшемся дереве. Этот лист тоже удалим, и так до тех пор, пока не останется дерево из двух вершин (ребро). Получим как раз последовательность длины $n - 1$.

Наоборот, по любой последовательности длины $n - 1$ можно построить помеченное дерево. Валентность любой вершины в этом дереве на 1 больше частоты, с которой переменная с номером этой вершины встречается в последовательности.

В частности, вершины, номера которых не встречаются в качестве индекса — листья. Взяв первый элемент последовательности, проведем ребро, соединяющее вершину с номером этого элемента и лист с минимальным номером. Затем первый элемент последовательности стираем и повторяем процедуру для новой последовательности (с учетом того, что один лист уже использован, а валентность вершины с номером, равным первому элементу последовательности, уменьшилась на 1; в частности, эта вершина могла стать листом).

Тем самым, есть взаимно-однозначное соответствие между помеченными деревьями на $n + 1$ вершине и мономы в разложении $(x_0 + x_1 + \dots + x_n)^{n-1}$. В частности, подставляя все x_i равными 1, получаем формулу Кэли.

Шестое заседание семинара состоялось 17 марта 2009 г. **М.А. Ройтберг** сделал доклад на тему «**Проекты в Красноярской летней школе (КЛШ)**»

Докладчик выделил 5 особенностей проектов КЛШ:

1. Длительность проекта 15 дней.

КЛШ длится 21 день. Из них на проекты дается всего 15. Что за это время можно выучить? М.А. попробовал дать школьникам опыт исследования как такового. За все 15 дней на курсе решается всего одна задача! Математически ориентированные ребята любят **долго** решать задачу. Такому стилю долгого решения полезно учить всяких школьников.

2. Самостоятельное блуждание в теме (ученику дается не материал, а поле для исследования). Мы боремся не за новые знания, а за радость открытия. Многие дети не любят математику, потому что им ни разу не довелось в ней что-то открыть. А ведь открытие может совершаться на самых разных уровнях.

3. Чтобы блуждание было успешным, в задаче должен быть параметр, а блуждание должно быть систематичным:

- начинай с самого простого,
- двигаясь по параметру, можно делать открытия.

Эти «правила блуждания» детям надо объяснить — это задача кураторов. Помощь должна быть косвенной, приходится изобретать непрямые способы подсказывания (например: просьба переписать решение другим способом).

4. Постановка задачи уточняется по ходу решения (как бывает и в жизни).

Здесь докладчик отметил, что он отчасти является учеником Г.Б. Шабата, но хочет выделить и различия между их подходами. Для Г.Б. целевая аудитория — будущие математики, а для М.А. — простые дети. Поэтому длинные определения, которые дает Г.Б., вводя школьника в тему, для М.А. непригодны — они отсекают большой процент детей. Для простого школьника мотивировки глубокой математикой не помогают. Формулировка задачи должна быть недлинная, понятная и интригующая (а уж решение может быть и сложным). Например, тему «Складные квадраты», о которой рассказывал Г.Б. в своем докладе, М.А. подает в виде такой задачи.



Обсуждение доклада

«Золотые числа». Золотые числа — это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например: $6^2 = 36$; $5^2 = 25$; $25^2 = 625$. Найти как можно больше золотых чисел; найти способ нахождения всех таких чисел.

Действие каждой задачи происходит в своем «мире», цель проекта — познакомить школьника с этим миром. (Подробнее см. *Ройтберг М.А. «Исследования математических миров»,*

<http://www.etudes.ru/ru/forums/topic.php?id=2348>). Это позволит экономить время при постановке задачи.

5. В конце работы должен быть отчет (конференция).

Проблемы конференции: 1) дети плохо рассказывают, 2) ребенку интересно быть в центре внимания самому, а не слушать других. На КЛШ эта проблема решается с помощью постерной конференции. Каждый школьник успевает побывать и докладчиком и слушателем, и отработать свой доклад.

Докладчик привел другие примеры задач.

«Мудрецы у людоедов». *Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки – кому белый, кому черный – наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник, начиная с последнего, должны сказать какого цвета у него колпак. Тех, кто ответил правильно, – отпускают. Остальных – съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?*

Вначале надо исследовать случай 1, 2, 3 человек, а далее найти общие закономерности. Задача обобщается на несколько цветов колпаков.

«Прямые и плоскости» (задача И.М. Гельфанда). *На сколько частей могут делить плоскость n прямыми?*

Формулировка совсем короткая, а детали выясняются потом: что будет, если прямые параллельны? Могут ли пересекаться по 3 и больше в одной точке? И т.д. Эти тонкости надо обсуждать не вначале, а по ходу решения задачи, когда школьники уже вошли во вкус.

Подробности организации проектов и другие примеры задач см. в статье: *Ройтберг М.А. О математических проектах в Красноярской Летней Школе // Математика. 2008. № 13, <http://www.int-sch.ru/docs/projects/Projects-KLSh-1.pdf>.*